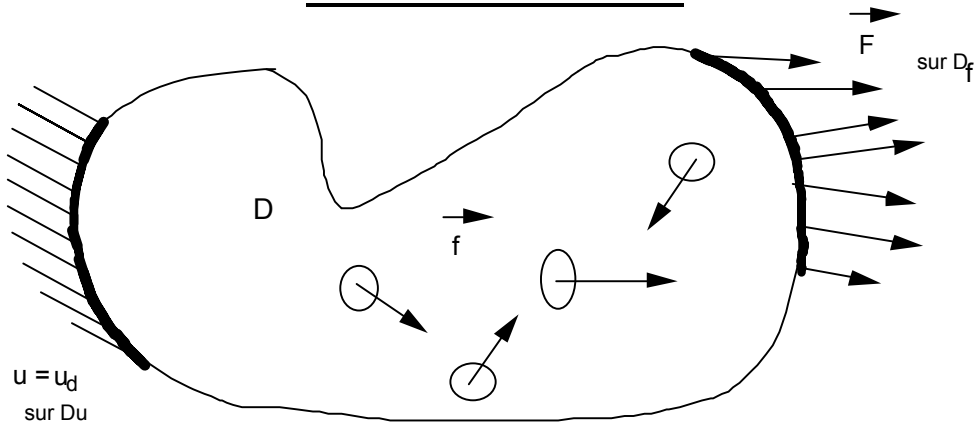


ELEMENTS FINIS

1. RAPPEL M.M.C.



Voici les notations utilisées:

Le repère fixe : $R(0, x_1, x_2, x_3)$

$$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$$

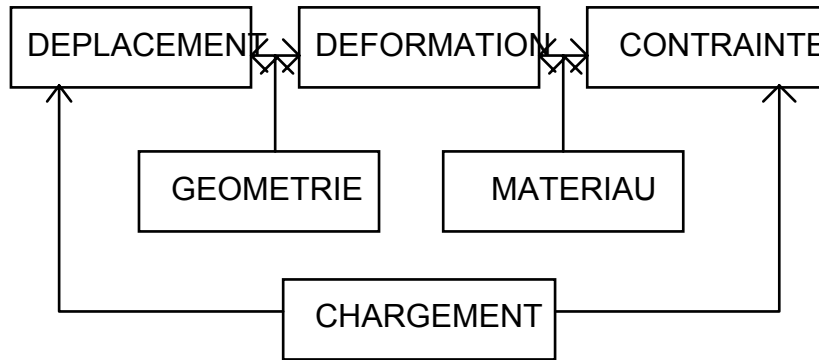
Nous travaillerons dans le cadre des petites déformations, cela implique que la position de référence reste la position initiale. Les chargements peuvent être de type volumique ou de type surfacique dans le cas 3-D. La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leur relation :

Le champ de déplacement, noté $u(x) = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases}$

Le champ des déformations noté $[\epsilon(X)] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{bmatrix}$

Le champ des contraintes noté $[\sigma(X)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}$

Les différentes relations entre ces quantités peuvent être schématisées par la figure suivante:



Dans le cas général, on montre que les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

qui se simplifient dans le cas de la statique à :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \vec{0}$$

où \vec{f} est une force volumique dans le cas 3-D.

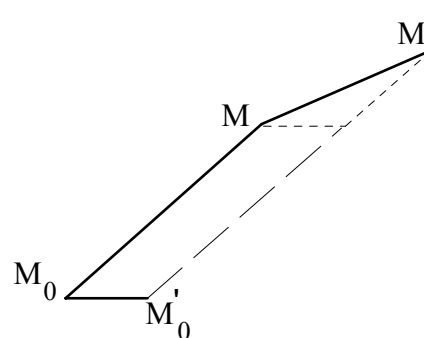
1.1. Déformation

Nous considérons $M_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}$ un point dans la configuration de départ et

$M'_0 = \begin{Bmatrix} x_0 + dx_0 \\ y_0 + dy_0 \\ z_0 + dz_0 \end{Bmatrix}$ un point voisin. Suite au chargement il se transforme respectivement

en $M = \begin{Bmatrix} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = z_0 + w \end{Bmatrix}$ et $M' = \begin{Bmatrix} x' = x + dx \\ y' = y + dy \\ z' = z + dz \end{Bmatrix}$. Ce qui donne sur un dessin la figure

suivante :



Si nous faisons une étude dans le cas 2-D, nous pouvons mettre en place la relation entre les déplacements et les déformations. Nous utilisons seulement des DL d'ordre 1.

$$x = x_0 + u(x_0, y_0)$$

$$u(x_0 + dx_0, y_0 + dy_0) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)dx_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)dy_0$$

$$(x - x_0) + (dx - dx_0) = (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)dx_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)dy_0$$

$$dx = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\right)dx_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)dy_0$$

Ce calcul peut être effectué pour les autres composantes dy, dz , dans le cas 3-D, et écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[dX] = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = (\text{Id} + [dU])[dX_0] = \left(\text{Id} + \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \\ \text{---} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} \end{pmatrix} [dX_0]$$

$$[dU] = \left([\boldsymbol{\varepsilon}] + [\boldsymbol{\Omega}] \right)$$

où:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \left| \text{grad}(U) + \text{grad}(U)^T \right|$$

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \frac{1}{2} \left| \text{grad}(U) - \text{grad}(U)^T \right|$$

On montre alors que le tenseur des déformations H s'écrit d'une façon générale :

$$[\underline{\underline{H}}] = [\boldsymbol{\varepsilon}] + \frac{1}{2} \left(([\boldsymbol{\varepsilon}] - [\boldsymbol{\Omega}])([\boldsymbol{\varepsilon}] + [\boldsymbol{\Omega}]) \right)$$

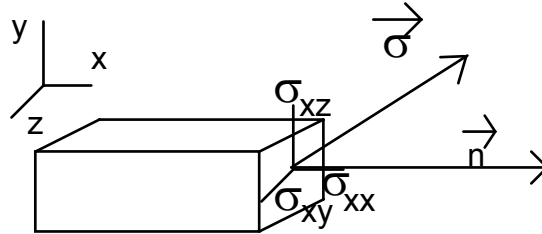
Dans le cadre des petites perturbations (faible rotation, faible déplacement), il suffit de prendre la partie linéaire de H.

$$[\underline{\underline{H}}] = [\boldsymbol{\varepsilon}]$$

Le tenseur des déformations $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ est symétrique par construction, il est défini positif et donc il a des valeurs propres réelles. Ces directions principales sont orthogonales. On les détermine à l'aide d'un cercle de Mohr et des mesures obtenues sur une rosette à 45°.

1.2. Contraintes

Les contraintes n'ont de sens que par rapport à une facette que l'on oriente par sa normale. Si on prend comme élément de volume un parallélépipède



$\vec{\sigma}$ est la contrainte dans le solide sur la facette de normal \vec{n} . Dans le cas où le vecteur normal est colinéaire à un vecteur de base, on a:

σ_{ij} où i correspond à la direction de la normal et j à la composante dans le plan de la facette.

1.2.1. Invariant du tenseur des contraintes

Nous pouvons définir un certain nombre d'invariant sur une matrice et donc sur le tenseur des contraintes. Les trois premiers invariants sont :

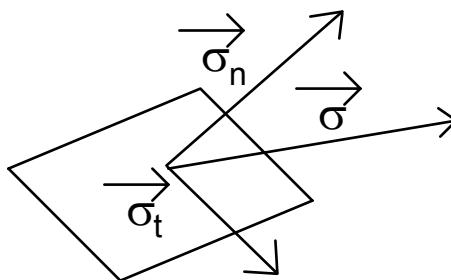
$$J_1 = \text{Tr}|\sigma| = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left((J_1)^2 + \text{Tr}|\sigma^2| \right)$$

$$J_3 = \text{Det}|\sigma| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

σ_{ij} est un tenseur symétrique défini positif et donc ses valeurs propres sont réelles, notées : $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Il est facile de montrer que les directions principales sont orthogonales.

On définit également la contrainte normale $\vec{\sigma}_n$ et tangentielle $\vec{\sigma}_t$.



On définit également le tenseur des contraintes comme la somme de deux tenseurs : le tenseur sphérique, dont la forme correspond à celle du tenseur des contraintes pour une pression hydrostatique, et le déviateur des contraintes.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{J_1}{3} I_3 + \underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}}_{sp} + \underline{\underline{\sigma}}_d$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{sp} = \begin{bmatrix} \frac{J_1}{3} & & \\ & \frac{J_1}{3} & \\ & & \frac{J_1}{3} \end{bmatrix} = \text{Tenseur de pression hydrostatique}$$

$\underline{\underline{\sigma}}_d$ = Partie deviatorique du tenseur des contraintes, qui correspond à la cission du matériau

Il est facile de montrer que si $\underline{\underline{\sigma}}_d = 0 \Rightarrow \|\underline{\underline{\sigma}}_n\| = J_1 / 3$ et $\|\underline{\underline{\sigma}}_t\| = 0$

1.3. Les relations de compatibilité.

Quand on connaît les déplacements il est simple de déterminer les déformations, mais le Pb inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : le problème n'a pas de solution unique. Cela est dû au mouvement de corps solide : Rotation d'ensemble, translation (Mécanique des milieux indéformables). Il existe des relations de compatibilité pour soulever ces indéterminations qui sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e_{ii}}{\partial j \partial k} = \frac{\partial}{\partial i} \left(-\frac{\partial e_{jk}}{\partial i} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial j} + \frac{\partial e_{ji}}{\partial k} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial i \partial j} = \left(\frac{\partial^2 e_{ii}}{\partial i \partial i} + \frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial j \partial j} \right) \end{cases}$$

Ces formules sont données sans sommation de l'indice répété.

1.4. Loi de comportement - Loi de Hook

La loi de comportement relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes. A chaque catégorie de matériau correspond un type de loi. Nous allons ici nous intéresser seulement au matériau élastique linéaire et donc à la loi de Hook :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\varepsilon}}$$

[L] est un tenseur d'ordre 4, mais comme les tenseurs des déformations et des contraintes sont symétriques, il est possible d'assimiler [L] à une matrice [6,6] en utilisant une représentation vectorielle des champs de déformations et de contraintes. De plus dans le cas d'un processus adiabatique et isotherme réversible, on a :

$$\omega = \frac{1}{2} (L_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow \frac{\partial^2 \omega}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = L_{ijkl} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} = L_{klij}$$

ω est la densité d'énergie de déformation interne.

Donc dans un cas général, il ne reste plus que 21 constantes différentes pour qualifier le comportement d'un matériau anisotrope.

1.4.1. Matériau isotrope

Aucune direction privilégiée, matériau macroscopiquement homogène

ex : Acier, inox, plastique

Définition de la loi de Hook:

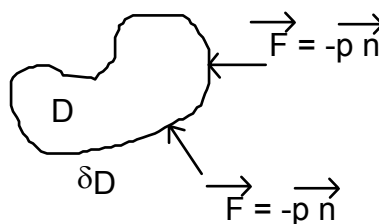
$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

λ, μ sont les coefficients de Lamè

Maintenant nous allons étudier des cas simples de chargement pour mettre en évidence des coefficients ayant des sens physiques plus évidents.

1.4.1.1. Cas compression uniforme

Le solide est soumis à un champ de pression surfacique et aucune force volumique.



les équations d'équilibre locales donnent :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 & \text{sur } D \\ \sigma_{ij} n_j = -p n_i & \text{sur } \delta D \end{cases}$$

En introduisant la loi de Hook et $[\epsilon] = \frac{1}{2} [\text{grad}(U) + \text{grad}(U)^T]$

Il est simple de montrer que $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ est solution du problème.

Calculons $\sigma_{ii} = J_1$

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= -3p = \lambda \epsilon_{ii} + 2\mu \epsilon_{ii} \\ \Rightarrow \epsilon_{ii} &= \frac{-3p}{\lambda + 2\mu}\end{aligned}$$

en introduisant ce résultat dans la loi de Hook, on obtient :

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{-3p}{\lambda + 2\mu} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$\text{si } i \neq j \quad \sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \epsilon_{ij} = 0$$

$$\text{si } i = j \quad \sigma_{ii} = -p \Rightarrow \epsilon_{ii} = \frac{-p}{3\lambda + 2\mu} = \frac{-p}{3K} \quad (\text{sans sommation sur } i)$$

Maintenant si nous calculons la variation relative de volume nous avons :

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{1}{V_0} \int_D u_{i,i} dv = \frac{-p}{K}$$

La variation de volume pour une pression p est inversement proportionnelle à K , qui est appelé **Module de rigidité à la compression**.

Rq : Plus K augmente plus le matériau est peu compressible, et si $K = \infty$ le matériau est dit incompressible.

1.4.1.2. Cas traction simple

Considérons une poutre cylindrique de longueur L limitée à ses extrémités par deux surfaces γ_i orthogonales à l'axe de révolution. Deux forces de traction opposées sont exercées sur la poutre à chacune de ses extrémités. $\frac{\vec{F}}{S} = (F, 0, 0)$. F est une force répartie sur la surface γ_i . Le matériau est supposé homogène isotrope, Il suit donc une loi de Hook.

les équations d'équilibre locales donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{sur } D \\ \sigma_{1j}n_j = -F, \sigma_{2j}n_j = \sigma_{2j}n_j = 0 \quad \text{sur } \gamma_1 \\ \sigma_{1j}n_j = F, \sigma_{2j}n_j = \sigma_{2j}n_j = 0 \quad \text{sur } \gamma_0 \\ \sigma_{ij}n_j = 0 \quad \text{sur } \delta D - \{\gamma_1, \gamma_0\} \end{array} \right.$$

Il est simple de vérifier que la fonction $\sigma_{11} = F, \sigma_{22} = \dots = \sigma_{33} = 0$ est solution du Pb.
 En utilisant la loi de Hook on a :

$$\epsilon_{ii} = \frac{F}{3\lambda + 2\mu}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{(3\lambda + 2\mu)\mu} F \\ \epsilon_{33} = \epsilon_{22} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F \end{cases}$$

En utilisant $\epsilon_{11} = \frac{F}{E} = \frac{\Delta l}{l}$, il est facile de montrer que le module d'élasticité ou module d'Young E est égal à :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

mais également que :

$$u_2(X) = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} Fx_2 + \text{cste}$$

$$u_3(X) = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} Fx_3 + \text{cste}$$

en posant classiquement $-\nu\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$, on en déduit que le coefficient de Poisson est :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Nous pouvons récapituler ces quantités dans un tableau :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \mu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \mu)} = G = \text{Module de cisaillement (cas isotrope)} \\ K &= \frac{E}{(1 - 2\nu)} \quad \text{où } \nu < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En inversant la loi de Hook, et en introduisant les relations précédentes on obtient :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

ex : Expliciter les matrices de comportement en contrainte et en déformation plane.

1.4.2. Matériau orthotrope

Définition :

Un matériau est dit orthotrope s'il a deux plans de symétrie de comportement mécanique, il y a donc trois axes d'orthotropies. Dans ce cas il y 9 constantes mécaniques pour définir la loi de comportement.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

exemple : Matériau composite (assemblage de pli à 0-90)

Isotrope transverse :

C'est un orthotrope mais avec une seule direction différente. C'est donc la même loi de

comportement mais $E_y = E_z; \nu_{xz} = \nu_{xy}; \frac{1}{G_{xz}} = \frac{2(1+\nu_{yz})}{E_y}$

exemple : Matériau composite (pli unidirectionnel à 0), bois

2. METHODE ENERGETIQUE EN ELASTICITE

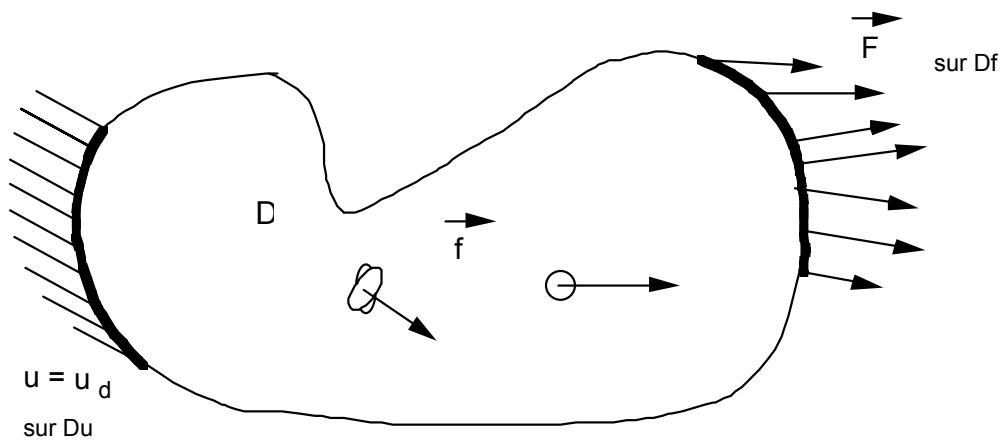
Pour effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- *l'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués
 - *les conditions aux limites
 - *la loi de comportement
- (1)

Les différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments constitutifs d'un problème de structure, et ainsi d'obtenir une formulation plus compacte et donc facile à discrétiser. Ce sont ces formulations qui sont à la base des méthodes par éléments finis.

2.1. Rappel du théorème des puissances virtuelles

Soit D le domaine 3-D, \vec{f} les forces de volume, \vec{F} les forces de surface



Les champs virtuels vérifiant $u^*(x) = 0 \quad \forall x \in D_u$ sont dit cinématiquement admissible à 0, noté **C.A. {0}**

Les champs virtuels vérifiant $u^*(x) = u_d \quad \forall x \in D_u$ sont dit cinématiquement admissible, noté **C.A.**

Principe des Puissances Virtuelles :

$\forall u^*(x) \in \text{C.A.}\{0\}$ $P_{\text{int}}(u^*(x)) + P_{\text{ext}}(u^*(x)) = P_{\text{acc}}(u^*(x))$
--

où

$$P_{\text{int}}(u^*(x)) = - \int_D \text{tr}(\sigma(x) \cdot \varepsilon^*(x)) d\Omega$$

$$P_{\text{ext}}(u^*(x)) = \int_D f(x) \cdot u^*(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot u^*(x) dS$$

$$P_{\text{acc}}(u^*(x)) = \int_D \left(\rho \frac{d^2(u^*(x))}{dt^2} \right) u^*(x) d\Omega$$

Dans le cas particulier de la statique il s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall u^*(x) \in C.A. \{0\} \\ P_{\text{int}}(u^*(x)) + P_{\text{ext}}(u^*(x)) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

C'est à partir de ce résultat et en introduisant la loi de comportement du matériau que l'on obtient la formulation variationnelle d'un problème d'élasticité.

2.2. Les différentes formulations

Dans ce chapitre nous allons étudier le cas d'un problème d'élasticité isotherme statique.

2.2.1. Formulation P.P.V.

Nous allons définir les différentes relations permettant d'écrire un problème complet d'élasticité isotherme statique .

La loi de comportement :

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{noté} \quad \varepsilon = M \cdot \sigma$$

ou

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{noté} \quad \sigma = L \cdot \varepsilon$$

Les tenseurs L et M, ont des propriétés de symétrie.

Les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(x) = u_d(x), \forall(x) \in D_u \\ F(x) = F_d(x), \forall(x) \in D_F \end{cases}$$

En introduisant la loi de comportement (4) dans l'écriture du P.P.V., on obtient :

$$\begin{aligned} \forall u^*(x) \in C.A. \\ \int_D \text{tr}(L \cdot \varepsilon(x) \cdot \varepsilon^*(x)) d\Omega = \int_D f(x) \cdot u^*(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot u^*(x) dS + \int_{D_u} (\sigma \cdot n) \cdot u_d^*(x) dS \end{aligned}$$

$(\sigma \cdot \vec{n})$ sont les réactions inconnues le long de la surface, ou du bord , ayant un déplacement imposé. Aussi pour éliminer ces inconnues nous allons choisir un champ

de déplacement virtuel cinématiquement admissible à zéro.. En prenant un tel champ il est possible de réécrire la puissance virtuelle des efforts extérieurs, qui dans ce cas est réduite à la puissance des efforts donnés :

$$\forall u^*(x) \in c.a\{0\}$$

$$P_{\text{ext}}(u^*(x)) = P_{\text{donn}}(u^*(x)) = \int_D f(x) \cdot u^*(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot u^*(x) dS$$

Il est possible de montrer que $\int_D \text{tr}(L \cdot \mathcal{E}(x) \cdot \mathcal{E}^*(x)) d\Omega$ est une forme bilinéaire symétrique en $u(x)$ et $u^*(x)$. Désormais, nous noterons cette forme bilinéaire par $\mathbf{K}(u, u^*)$. Donc tout problème d'élasticité isotherme en petite déformation (indépendance du domaine envers $u(x)$) qui peut s'écrire Pb(I):

$$Pb(I) \begin{cases} \text{div}(\sigma) + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{en statique}) \\ \sigma = L \mathcal{E} \\ u(x) = u_d \quad \text{sur} \quad D_u \\ F(x) = u_d \quad \text{sur} \quad D_F \end{cases}$$

admet la formulation du principe des puissances virtuelles équivalente suivante :

Formulation 1

$$\begin{aligned} u(x) &\in C.A \\ k(u, u^*) &= P_{\text{donn}}(u^*) \quad \forall u^* \in C.A\{0\} \end{aligned} \quad (9)$$

où :

$$k(u, u^*) = \int_D \text{tr}(L \cdot \mathcal{E}(x) \cdot \mathcal{E}^*(x)) d\Omega$$

$P_{\text{donn}}(u^*) =$ La puissance virtuelle des efforts donnés

La démonstration de l'équivalence entre le Pb(I) et la FV1 sera laissée à la discrétion du lecteur!!!!

2.2.2. Energie Potentielle

Définition :

L'énergie de déformation par unité de masse ou densité d'énergie de déformation, notée $\omega(\mathcal{E})$, est une fonction telle que la loi de comportement s'écrive :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \omega}{\partial \mathcal{E}} = L \mathcal{E}$$

* Le tenseur des contraintes σ dérive d'un potentiel, $\omega(\varepsilon)$.

$$*\rho\partial\omega = \sigma_{ij}\partial\varepsilon_{ij} = \text{tr}(\sigma.\partial\varepsilon).$$

Déterminons $\omega(\varepsilon)$:

$$\rho\partial\omega = \sigma_{ij}\partial\varepsilon_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl}\partial\varepsilon_{ij} = L_{ijkl}\partial\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

Nous faisons apparaître ici seulement la partie due à un chargement mécanique car nous sommes dans un isotherme. Dans un cadre plus général il est facile de montrer qu'il s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \rho\partial\omega &= \sigma_{ij}\partial\varepsilon_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl}\partial\varepsilon_{ij} - L_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{\text{th}}\partial\varepsilon_{ij} \\ &= \underbrace{L_{ijkl}\partial\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}}_{\text{Mécanique}} - \underbrace{\sigma_{ij}^{\text{th}}\partial\varepsilon_{ij}}_{\text{Thermique}} \end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \partial\left(\frac{1}{2}L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\right) &= \frac{1}{2}\left(L_{ijkl}\partial\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}\right) \\ &= L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl} = \rho\partial\omega + \sigma_{ij}^{\text{th}}\partial\varepsilon_{ij} \\ &\text{donc} \\ \rho\omega(\varepsilon) &= \frac{1}{2}L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^{\text{th}}\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

Proposition 1 :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } P_{\text{int}}(\delta u) = -\delta W(u) \quad \text{avec} \quad W(u) = \int_D \rho\omega(\varepsilon(u))d\omega \\ \text{ii) } P_{\text{int}}\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}W(u) \\ \text{iii) Dans un cycle } u(x, t1) = u(x, t2) \text{ le travail des efforts intérieurs} \\ \text{est nul} \end{array} \right.$$

Définition de l'énergie potentielle :

On appelle énergie potentielle la fonctionnelle suivante :

$$\boxed{\Pi_d(u) = W(u) - P_d(u)}$$

Formulation 2

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) \in C.A\{u_d\} \\ \delta(\Pi_d(u)) = 0 \Leftrightarrow \text{P.PV} \end{array}}$$

Le champ de déplacement qui vérifie la formulation 2 est solution du Pb(I). La démonstration de cette proposition est à faire à l'aide du travail virtuel des efforts donnés.

Rq: Cette formulation est très adaptée aux méthodes de discrétisation de type Galerkin ou Ritz. Elle est généralement le support pour la méthode par éléments finis.

2.2.3. Energie Potentielle complémentaire

Nous rappelons que le problème complet s'écrit de la façon suivante :

$$\text{Pb(I)} \begin{cases} \text{div}(\sigma) + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{en statique}) \\ \varepsilon = M\sigma + \varepsilon^{\text{th}} \\ u(x) = u_d \quad \text{sur} \quad D_u \\ \sigma \cdot n = F_d \quad \text{sur} \quad D_F \end{cases}$$

Définition :

* L'ensemble des champs de contraintes statiquement admissible noté S.A. est défini par :

$$\text{S.A.}(f, F_d) = \{ \sigma / \text{div}\sigma + f = 0 \quad \forall x \in D, \sigma \cdot n = F_d \quad \forall x \in D_F \}$$

Définition :

L'énergie de déformation par unité de masse ou densité d'énergie de déformation, notée $w_c(\sigma)$, est une fonction telle que la loi de comportement (4) s'écrit dans le cas isotherme:

$$\varepsilon = \rho \frac{\partial w_c}{\partial \sigma} = M\sigma$$

* Le tenseur des contraintes σ dérive d'un potentiel $w_c(\sigma)$

$$* \rho \partial w_c = \varepsilon_{ij} \partial \sigma_{ij} = \text{tr}(\partial \sigma \cdot \varepsilon)$$

Déterminons $w_c(\sigma)$:

$$\rho \partial w_c = \partial \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \partial \sigma_{ij} = M_{ijkl} \partial \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

Nous faisons apparaître ici seulement la partie due à un chargement mécanique car nous sommes dans un cadre isotherme. Dans un cadre plus général il est facile de montrer qu'elle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \rho \partial \omega_c &= \sigma_{ij} \partial \varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \partial \sigma_{ij} - M_{ijkl} \sigma_{kl}^{\text{th}} \partial \sigma_{ij} \\ &= \underbrace{M_{ijkl} \partial \sigma_{ij} \sigma_{kl}}_{\text{Mécanique}} - \underbrace{\varepsilon_{ij}^{\text{th}} \partial \sigma_{ij}}_{\text{Thermique}} \end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \partial \left(\frac{1}{2} M_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right) &= \frac{1}{2} \left(M_{ijkl} \partial \sigma_{ij} \sigma_{kl} + M_{ijkl} \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl} \right) \\ &= M_{ijkl} \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl} = \rho \partial \omega + \varepsilon_{ij}^{\text{th}} \partial \sigma_{ij} \\ \text{donc} \\ \rho \omega_c(\varepsilon) &= \frac{1}{2} M_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \varepsilon_{ij}^{\text{th}} \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Définition de l'énergie potentielle complémentaire :

* L'énergie de déformation complémentaire est définie par :

$$W_c(\sigma) = \int_D \rho \omega_c(\sigma) d\omega$$

* L'énergie potentielle complémentaire est définie par :

$$\Pi_c(\sigma) = W_c(\sigma) - \int_{D_u} (\sigma \cdot n) \cdot u_d ds$$

Théorème :

Toute solution σ du problème initial réalise un minimum de l'énergie potentiel complémentaire sur l'ensemble des champs statiquement admissibles. Cette solution est unique.

Démonstration

étape 1:

On multiplie la loi de comportement par $\delta \sigma_{ij}$ qui est un champ statiquement admissible S.A.(0,0) et on intègre.

$$\int_D \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d\omega = \int_D \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} d\omega = \delta W_c$$

Soit un tenseur de contrainte σ' lui aussi S.A.(0,0) et champ de déplacement réel $u(x)$ correspondant au champ de contrainte σ réel. On a alors :

$$P'_{\text{ext}}(u) + P'_{\text{int}}(u) = 0$$

$$\int_{D_u} (\sigma' \cdot n) \cdot u_d \, ds - \int_D \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} \, d\omega = 0$$

On prend $\sigma' = \delta\sigma$:

$$\delta w_c = \int_D \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \, d\omega = \int_{D_u} (\delta\sigma \cdot n) \cdot u_d \, ds \Rightarrow \delta\Pi_c = 0 \quad \forall \sigma \in S.A.$$

Etape 2:

L définie positif \Leftrightarrow M définie positif

$$\sigma \geq 0 \Rightarrow \sigma M \sigma \geq 0$$

$$\Pi_c(\sigma) = \frac{1}{2} \int_D \sigma M \sigma \, d\omega + \text{termes lineaires en } \sigma$$

$\Rightarrow \Pi_c(\sigma)$ est strictement convexe.

L'extremum est un minimum et il est unique.

Formulation 2

$$\begin{aligned} \sigma(x) &\in S.A\{f_d, F_d\} \\ \delta(\Pi_c(\sigma)) &= 0 \Leftrightarrow P.PV \end{aligned}$$

Rq: La discrétisation à partir de cette formulation par la méthode de Galerkin ou Ritz est possible mais dans un cas général impossible à mettre en oeuvre. Car il faut identifier des champs de contrainte statiquement admissible. Il y a cependant deux exceptions notables :

* Les modèles à une dimension où l'ensemble des S.A. est de dimension finie égale au degré d'hyperstaticité.

* L'élasticité plane sans chargement volumique.

2.2.4. Formulation mixte

Les méthodes en déplacement sont précises pour trouver $u(x)$, mais moins précises pour trouver les contraintes. Les méthodes en contraintes sont très séduisantes car précises en contrainte donc en déplacement, mais elles sont quasiment impossible à mettre en oeuvre. D'où l'idée de mettre en place une fonctionnelle en (u, σ) , pour cela il suffit d'introduire des multiplicateurs de Lagrange.

On rappelle que le problème :

$\delta f(u) = 0$ avec n contraintes $g_i(u) = 0$

est équivalent à :

$$\delta(f(u) - \lambda_i g_i(u)) = 0$$

car

$$\delta(f(u) - \lambda_i g_i(u)) = f(\delta u) - \lambda_i g_i(\delta u) - \delta \lambda_i g_i(u) = 0$$

et donc :

$$\begin{cases} f(\delta u) - \lambda_i g_i(\delta u) = 0 \\ g_i(u) = 0 \end{cases}$$

Avantage : on n'a plus à imposer les conditions $g_i(u)=0$, elles deviennent des conséquences de $\delta f(u) = 0$

Inconvénient : Nous avons introduit des variables supplémentaires λ . On dit alors que l'on a relaxé les conditions.

Pour mettre en évidence la fonctionnelle de Elinger-Reisner, il faut partir du théorème de l'énergie complémentaire.

$$\delta \Pi_c(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in S.A.(f, F_d)$$

$$S.A.(f, F_d) = \left\{ \sigma / \operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \forall x \in D, \sigma \cdot n = F_d \quad \forall x \in D_F \right\}$$

Pour relaxer la condition $\operatorname{div} \sigma + f = 0$, on introduit un multiplicateur $u(x)$ défini sur D et la fonctionnelle devient :

$$L(\sigma, u) = \Pi_c(\sigma) + \int_D u(x)(\operatorname{div} \sigma + f) d\omega$$

La deuxième intégrale étant mal commode pour une discrétisation, si u est linéaire continue par morceau alors σ est constante par morceau et donc $\operatorname{div}(\sigma)$ n'est pas définie. Nous allons donc faire une intégration par partie du second terme.

$$\begin{aligned} \int_D u(x)(\operatorname{div} \sigma) d\omega &= - \int_D \operatorname{tr}(\sigma \varepsilon) d\omega + \int_{\partial D} u(\sigma \cdot n) ds \\ &= - \int_D \operatorname{tr}(\sigma \varepsilon) d\omega + \int_{D_F} u(\sigma \cdot n) ds + \int_{D_u} u(\sigma \cdot n) ds \end{aligned}$$

$$\int_D u(x)(\operatorname{div} \sigma) d\omega = - \int_D \operatorname{tr}(\sigma \varepsilon) d\omega + \int_{D_u} u(\sigma \cdot n) ds + \int_{D_F} u \cdot F_d ds$$

d'où :

$$L(\sigma, u) = \Pi_c(\sigma) + \int_D u(x)(f) d\omega - \int_D \operatorname{tr}(\sigma \varepsilon) d\omega + \int_{D_u} u(\sigma \cdot n) ds + \int_{D_F} u \cdot F_d ds$$

Où l'énergie potentiel complémentaire est définie par :

$$\Pi_c(\sigma) = \int_D \rho \omega_c(x) d\omega - \int_{D_u} (\sigma \cdot n) \cdot u_d ds$$

Si on calcule $\delta L(u, \sigma) = 0$ avec $\delta u = 0$, $\delta v = 0$ et $\delta \sigma = 0$, on obtient la loi de comportement du matériau :

$$\varepsilon = \rho \frac{\partial \omega_c}{\partial \sigma} = M\sigma$$

Le multiplicateur de Lagrange peut donc s'identifier au déplacement. De même en faisant varier σ sur le bord de D , on obtient :

$$\forall x \in D_u, u(x) = u_d(x)$$

Cette condition est facile à réaliser, elle correspond à la condition des cinématiquement admissibles. Nous pouvons donc écrire la fonctionnelle mixte, $L(u, \sigma)$, pour les champs cinématiquement admissible :

$$\begin{aligned} \forall u(x) \in C.A. &= \{u(x) / u(x) = u_d \forall x \in D_u\} \\ L(\sigma, u) &= \Pi_c(\sigma) + \int_D u(x)(f)d\omega + \int_{D_F} u \cdot F_d ds - \int_D \text{tr}(\sigma \varepsilon) d\omega \\ L(\sigma, u) &= \Pi_c(\sigma) + P_d(u) - \int_D \text{tr}(\sigma \varepsilon) d\omega \end{aligned}$$

Formulation 3 :

$$\delta(L(\sigma, u)) = 0, \forall u \in C.A. \Leftrightarrow P.P.V \Leftrightarrow \delta(\Pi_d) = 0, \forall u \in C.A. \Leftrightarrow \delta(\Pi_c) = 0 \forall \sigma \in S.A.$$

Rq : La discrétisation à l'aide de cette formulation est possible avec Galerkin ou Ritz. Elle entraîne l'utilisation des éléments mixtes pour la méthode éléments finis.

3. PRINCIPE DE DISCRETISATION

Les différentes formulations ont abouti à des formulations variationnelles compactes mais continues. Le principe des éléments finis étant de résoudre un problème discrétisé nous allons maintenant introduire des méthodes de discrétisation dans les différentes formulations.

3.1. GALLERKINE

La méthode de Galerkin est adaptée à la formulation variationnelle découlant du P.P.V.

Objectif : On se donne n fonctions de base $\{P_i(x)\}$ appartenant au cinématiquement admissible à zéro et on cherche la solution du Pb(I) comme une combinaison linéaire de ces fonctions, dans le cas où il existe des déplacements imposés on rajoute une fonction les réalisant.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \quad \in C.A.$$

$$u^*(x) = P_i(x) \quad \in C.A.\{0\}$$

Le problème d'élasticité isotherme étant Pb(I) étant équivalent à la formulation variationnelle Fv(I), il suffit d'introduire ces notations dans l'écriture de (9) et nous obtenons alors :

$$k(u(x), P_i(x)) = P_{\text{donn}}(P_i(x))$$

Il suffit alors de faire varier i de 1 à n . Nous obtenons alors un système linéaire de n équations à n inconnues. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[K][Q] = [F]$$

où :

$$[K] \text{ est la matrice de rigidité } \quad K_{ij} = k(P_i, P_j)$$

$[Q]$ est le vecteur des inconnues

$$[F] \text{ est le vecteur force } \quad F_i = \langle f, P_i \rangle - k(u_d, P_i)$$

$$\text{où dans un cas plus général } F_i = \langle f, P_i \rangle + \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^{\text{th}} \cdot \varepsilon(P_i)) d\omega - k(u_d, P_i)$$

La matrice K est symétrique. L'équation mis sous sa forme matricielle correspond à la forme générale d'un problème discrétisé. En effet, nous sommes passé d'un problème continu à un problème discrétisé, de l'étude $u(x,y,z)$ à l'étude de n inconnues Q_i .

3.2. RITZ

3.2.1. Formulation en déplacement :

Il suffit d'introduire dans l'écriture de l'énergie potentielle la même discrétisation que celle utilisée dans la méthode de Galerkin. Pour obtenir les équations il suffit de calculer la variation de l'énergie potentielle :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \quad \in C.A.$$

$$\delta u(x) = \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x) \quad \in C.A. \{0\}$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} k(u(x), u(x)) - P_{\text{don}}(u(x))$$

$$\begin{aligned} \delta(\Pi_p) &= \delta\left(\frac{1}{2} k(u(x), u(x)) - P_{\text{don}}(u(x))\right) \\ &= \frac{1}{2} k(\delta u(x), u(x)) + \frac{1}{2} k(u(x), \delta u(x)) - P_{\text{don}}(\delta u(x)) \\ &= \frac{1}{2} k\left(\sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x), u(x)\right) + \frac{1}{2} k\left(u(x), \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x)\right) - P_{\text{don}}\left(\sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x)\right) \end{aligned}$$

comme $k(u, u)$ est une forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} &= k\left(\sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x), \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x)\right) - P_{\text{don}}\left(\sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x)\right) \\ &= k\left(\sum_{i=1}^n Q_i P_i(x), \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x)\right) + k\left(u_d(x), \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x)\right) - P_{\text{don}}\left(\sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x)\right) \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle en utilisant les notation précédentes

$$= \delta[Q][K][Q] - \delta[Q][F] = 0 \quad \forall \delta[Q]$$

et donc

$$[K][Q] = [F]$$

Ce qui revient à écrire les différentes équations suivantes

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial Q_i} = 0$$

3.2.2. Formulation en Contrainte :

Il suffit de faire la même chose que pour la formulation en déplacement mais avec l'énergie potentielle complémentaire et une discrétisation sur le champ de contrainte. Il faut donc prendre des fonctions de base qui soient S.A. (c'est là que les athéniens s'atteignent).

3.2.3. Formulation Mixte :

Il suffit de faire la même chose que pour la formulation en déplacement mais avec la fonctionnelle de Ellinger-Reisner et une discrétisation sur le champ de contrainte et sur le champs de déplacement. Il faut donc introduire deux bases.

4. Intégration numérique

Il est clair que pour résoudre le système $[K][Q] = [F]$, il y a des intégrations à faire. Si on utilise un ordinateur pour déterminer les solutions du système, il faut faire des intégrations numériques, car seuls les codes de calcul formel font des intégrations exactes. La grande majorité des codes E.F. n'utilisent pas le calcul formel. Nous allons voir ici deux méthodes d'intégrations numériques dans le cas 1-D. Nous allons nous intéresser au problème suivant :

$$\text{Déterminer l'intégrale suivante : } I = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

4.1. Méthode de Newton-Cotes

Cette méthode utilise n points, x_i , répartis régulièrement sur $[-1,1]$, avec des poids w_i . Le Pb est de déterminer la position et la valeur des poids pour avoir une intégration exacte dans certain cas et donc :

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_i w_i f(x_i)$$

Exemple:

Prenons $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Déterminons les poids.

$$I = \int_{-1}^1 (ax + b) dx = 2b = w_1 f(-1) + w_2 f(1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ w_1 - w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow w_1 = w_2 = 1$$

Donc avec deux points $-1,1$ ayant des poids égaux à 1, nous intégrons de façon exacte un polynôme d'ordre 1. Mais que se passe-t-il avec un polynôme d'ordre supérieur ?

$$I = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{2}{3} a + 2c$$

$$\neq w_1 f(-1) + w_2 f(1) = 2a + 2c$$

Il semble donc qu'avec deux points et la méthode de Newton-Cotes, on intègre seulement un polynôme d'ordre 1. A titre d'exercice on peut déterminer les poids en prenant comme points -1, 0, 1.

Rq : On montre que la méthode de **Newton-Cotes intègre exactement un polynôme d'ordre n-1 avec n points.**

4.2. Méthode de Gauss

Le principe de la méthode reste le même, mais il faut prendre les points de façon symétrique à 0 et dans $]-1, 1[$.

Prenons deux points x_1, x_2 , ayant des poids respectifs w_1, w_2 et un polynôme d'ordre 1

$$I = \int_{-1}^1 (ax + b) dx = 2b = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ x_1 w_1 + x_2 w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{deux types de solutions}$$

$$\begin{cases} w_1 = w_2 = 1 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} w_1 = 2 \\ x_1 = -x_2 = 0 \end{cases}$$

Donc avec un seul point il est possible de déterminer l'intégration exacte d'un polynôme d'ordre 1.

Prenons maintenant un polynôme d'ordre 3 et deux points :

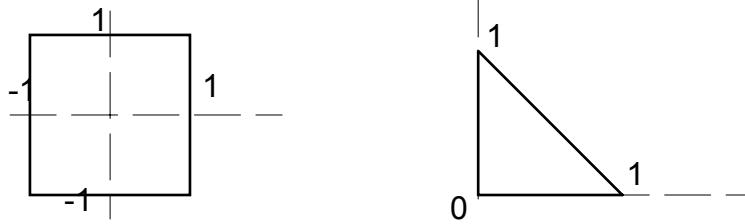
$$I = \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = \frac{2}{3}b + 2d = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ (w_1 - w_2)x_1 = 0 \\ x_1^2 (w_1 + w_2) = \frac{2}{3} \\ (w_1 - w_2)x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 1 \\ x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

On observe qu'avec seulement deux points on intègre exactement un polynôme de degré 3

Rq : On montre que la méthode de **Gauss permet d'intégrer exactement un polynôme d'ordre 2n-1 avec n points.**

Dans le cas des intégrales double et triple cela marche de la même façon. Les domaines sont dans le cas 2-D :



Les valeurs des points de gauss sont données par exemple dans "Volume 1 Modélisation des structures par éléments finis. J.L. Batoz et G.Dhatt".

5. E.F. TECHNIQUE DE RESOLUTION

5.1. Principes généraux

On découpe une structure en élément de forme donnée : triangle, quadrilatère, tétraèdre ... Puis on cherche des solutions comme une C.L. de fonctions données sur chaque élément et non plus sur la structure complète comme Ritz ou Gallerkine. La méthode par éléments finis correspond donc à un méthode de Ritz ou Gallerkine par morceau. L'ensemble de tous les éléments constitue le **Maillage**.

Nous allons développer ici dans un premier temps la méthode avec une formulation en déplacement dans le cas 1-D et 2-D en élasticité linéaire isotherme.

5.2. Matrices élémentaires

5.2.1. Approximation des déplacements

Nous prenons ici une interpolation linéaire des déplacements sur chaque élément :

$$\begin{cases} u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x,y) = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases}$$

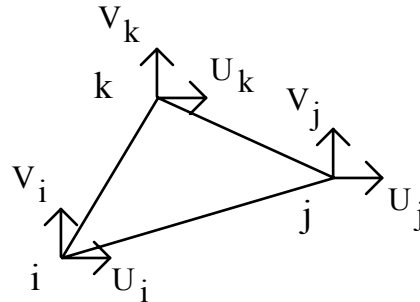
$$[U] = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

(x,y) sont les coordonnées d'un point de l'élément considéré. Nous pouvons le réécrire de la façon suivante :

$$[U]_e = [P(x,y)][a]_e$$

5.2.2. Approximation nodale

L'approximation des déplacements à partir uniquement des coefficients des polynômes d'interpolation n'a pas de sens physique évident. Aussi pour des raisons de compréhension, on exprime les déplacements sur un élément à partir des déplacements de ces sommets, ou d'autre point de la figure, appelé **Noeud**. Nous allons développer un exemple avec un triangle à trois noeuds.



Elément triangle à trois noeuds

Les déplacements, ou les inconnues, en chacun des noeuds sont appelés **variable nodale, ou degré de liberté (ddl)**, noté [Q]:

$$[Q] = [q_i] = [U_i \ U_j \ U_k \ V_i \ V_j \ V_k]$$

Nous pouvons relier ces ddl aux coefficients des polynômes d'interpolation

$$q_1 = a_1 + a_2x_i + a_3y_i$$

et donc

$${}^t[Q] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

noté : ${}^t[Q] = [P_n][a]$ où $[P_n]$ est la matrice nodale

en introduisant cette notation dans l'interpolation des déplacements, nous obtenons :

$$[U]_e = [P(x,y)][P_n]^{-1} {}^t[Q]_e$$

$$= [N(x,y)] {}^t[Q]_e = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} {}^t[Q]_e \quad \text{où } [N(x,y)] \text{ est la matrice}$$

d'interpolation ou fonction de forme

5.2.3. Approximation des déformations

Dans un cadre de petites perturbations, nous avons défini les déformations en fonction des déplacements. Il suffit d'appliquer correctement les formules précédentes pour obtenir l'écriture matricielle qui découle de la discrétisation. Pour des raisons de simplification d'écriture nous allons étudier un cas 2-D de déformation plane :

$$[\epsilon_{\alpha\beta}] = [\epsilon(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= [C] \begin{bmatrix} N_{x,x} \\ N_{x,y} \\ N_{y,x} \\ N_{y,y} \end{bmatrix} {}^t[Q]_e = [B]_e {}^t[Q]_e$$

Rq : Dans le cas d'une interpolation linéaire des déplacements la matrice [B] est constante sur l'élément.

5.2.4. Approximation de l'énergie potentielle sur un élément

Nous nous plaçons dans le cas de l'élasticité en déformation plane, isotrope et sans force de volume, dans ce cas l'énergie potentielle s'écrit :

$$\Pi_d(u) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_D \epsilon L \epsilon d\omega}_{W(u) \text{ Energie de def}} - \underbrace{\int_{D_F} F_d u ds}_{P_d(u) \text{ Travail des efforts don}}$$

Nous pouvons écrire la loi de comportement sous forme matricielle :

$$[\sigma]_e = [D][\epsilon]_e \quad \text{où } [D] \text{ est la matrice de comportement}$$

On détermine la matrice [D] à partir de la loi de Hook dans le cas élastique isotrope linéaire.

Nous allons maintenant expliciter l'énergie de déformation sur un élément :

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_e \epsilon^T L \epsilon d\omega_e = \frac{1}{2} \int_e {}^t[\epsilon]_e [\sigma]_e d\omega_e \\ &= \frac{1}{2} \int_e {}^t[\epsilon]_e [D][\epsilon]_e d\omega_e = \frac{1}{2} \int_e {}^t[Q]_e {}^t[B]_e [D][B]_e [Q]_e d\omega_e \\ &= \frac{1}{2} {}^t[Q]_e \int_e {}^t[B]_e [D][B]_e d\omega_e [Q]_e = \frac{1}{2} {}^t[Q]_e [K]_e [Q]_e \end{aligned}$$

où [K] est la matrice de rigidité élémentaire.

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} {}^t[Q]_e [K]_e [Q]_e}$$

Rq : Dans le cas des interpolations linéaires l'énergie de déformation élémentaire est directement proportionnelle à la surface de l'élément considéré.

Si l'élément n'est pas en contact avec la frontière alors le travail élémentaire des efforts donnés est nul (nous avons ici un chargement surfacique), sinon il s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{de}(u) &= \int_{\partial e} F_d u ds_e = \int_{\partial e} {}^t[F_d(x,y)][U]_e ds_e \\ &= \int_{\partial e} {}^t[F_d(x,y)][N] ds_e [Q]_e = \langle F_{de}, Q \rangle = {}^t[F_{de}] \cdot [Q]_e \\ &\text{noté } \langle F_{de}, Q \rangle \end{aligned}$$

[Q]_e ne faisant intervenir ici que les variables nodales en contact avec D_F.

L'énergie potentielle élémentaire peut donc s'écrire :

$$\boxed{\Pi_{de} = \frac{1}{2} {}^t[Q]_e [K]_e [Q]_e - \langle F_{de}, Q \rangle}$$

5.2.5. Propriétés de la matrice de rigidité élémentaire

Propriétés:

$$\boxed{\begin{aligned} [K]_e &\text{ est symétrique positive} \\ [K]_e &\text{ a trois Valeurs propres nulles et trois positives} \end{aligned}}$$

$[K]_e$ étant définie à partir de l'énergie de déformation interne élémentaire, qui est une forme bilinéaire positive, cela implique que $[K]_e$ est symétrique positive.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{D_e} \epsilon \sigma d\omega_e = 0 \Leftrightarrow \epsilon L \epsilon = 0 \Leftrightarrow \epsilon = 0$$

Ces déformations à énergie nulle sont les mouvements de corps rigide. Il est facile de voir à partir de la définition de la déformation en petite perturbation et dans un cas de déformation plane la formel de ces déplacements

$$[\epsilon]_e = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) = a - \omega y \\ v(x, y) = b + \omega x \end{cases}$$

Ces déplacements rigides par éléments sont inclus dans l'approximation linéaire des déplacements, et donc l'ensemble $\left\{ [Q]_e / W_e = \frac{1}{2} {}^t [Q]_e [K]_e [Q]_e = 0 \right\}$ est de dimension exactement trois. Donc il y a trois valeurs propres nulles et trois positive car W_e est positive.

5.3. Matrices globales

On appelle matrice globale la matrice correspondant à l'assemblage de toutes les matrices élémentaires, aussi bien de rigidité que des efforts appliqués.

5.3.1. Assemblage matrice de rigidité

L'énergie de déformation totale de la structure est égale à la somme de toutes les énergies de déformation élémentaires. Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

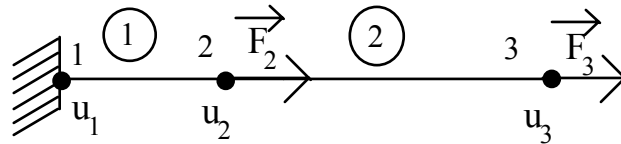
$$W = \sum_e W_e = \sum_e \frac{1}{2} {}^t [Q]_e [K]_e [Q]_e = \frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_t [Q]$$

$[K]_t$: est la matrice de rigidité globale.

$[Q]$: est le vecteur contenant tous les ddl du problème

Exemple d'assemblage pour une structure simple :

Prenons une structure composée de deux éléments barres ayant 1ddl u_i par noeuds :



L'énergie de déformation élémentaire à la forme suivante :

$$W_e = \frac{1}{2} {}^t[Q]_e [K]_e [Q]_e$$

où :

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Q]_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

et

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Q]_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de rigidité globale, il suffit d'assembler ces deux matrices de la façon suivante :

$$[K]_t = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

De part la méthode d'assemblage la matrice K conserve sa symétrie et est strictement définie positive s'il n'existe pas de déplacements rigides.

5.3.2. Assemblage du vecteur des forces appliquées

Dans le cas où il n'existe pas de force volumique, nous avons montré que le travail des efforts appliqués, qui est une fonction linéaire en $[Q]_e$, s'écrit :

$$\langle F_{d_e}, Q \rangle = {}^t[F_{d_e}] \cdot [Q]_e$$

Il suffit d'assembler les matrices correspondantes. Dans l'exemple que nous traitons avec deux éléments cela donne :

$$\langle F_t, Q \rangle = {}^t[Q][F]_t$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [F]_t = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

5.3.3. Variation de l'énergie potentielle

Nous venons de décrire les différentes matrices nécessaire à l'écriture de l'énergie potentielle. Nous calculer maintenant la variation de l'énergie potentielle totale, qui nous donnera la solution du Pb(I) :

$u(x) \in C.A\{u_d\} / \delta(\Pi_d(u)) = 0$ est solution du problème

l'énergie potentielle total est donnée par :

$$\Pi_d = \frac{1}{2} {}^t[Q][K]_t[Q] - \langle F_t, Q \rangle$$

$$\begin{aligned} \delta(\Pi_d) &= \delta\left(\frac{1}{2} {}^t[Q][K]_t[Q] - \langle F_t, Q \rangle\right) \\ &= \frac{1}{2} \delta\left({}^t[Q]\right)[K]_t[Q] + \frac{1}{2} {}^t[Q][K]_t \delta([Q]) - \delta\left({}^t[Q]\right)[F]_t \\ &= \frac{1}{2} \delta\left({}^t[Q]\right)[K]_t[Q] + \frac{1}{2} \left({}^t[Q][K]_t \delta([Q])\right) - \delta\left({}^t[Q]\right)[F]_t \\ &= \frac{1}{2} \delta\left({}^t[Q]\right)[K]_t[Q] + \frac{1}{2} \delta\left({}^t[Q]\right) {}^t[K]_t[Q] - \delta\left({}^t[Q]\right)[F]_t \\ &= \delta\left({}^t[Q]\right)[K]_t[Q] - \delta\left({}^t[Q]\right)[F]_t \\ &= \delta\left({}^t[Q]\right)\left([K]_t[Q] - [F]_t\right) = 0 \quad \forall \delta\left({}^t[Q]\right) \in C.A(0) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le système linéaire suivant à résoudre :

$$\boxed{[K]_t[Q] = [F]_t}$$

C'est ce système que résout un code de calcul d'éléments finis dans le cas de l'élasticité linéaire. Donc en optimisant le maillage, vous réduisez la taille du système à résoudre et donc vous gagnez du temps calcul !!!!. Mais avant de lancer votre calcul il faut introduire les conditions aux limites qui auront pour objet d'éliminer les mouvements de corps rigide. Si vous ne bloquez pas suffisamment de ddl le système n'a pas de solution unique et le calcul plante.

5.3.4. Prise en compte des conditions aux limites.

Nous présentons ici les différents méthodes de prise en compte des condition aux limites en déplacements.

5.3.4.1. Méthode brutale

C'est la méthode la plus simple sur le plan de la conception mais la plus complexe à mettre en oeuvre numériquement. Nous allons imposer $q_i = q_d$ qui est le $i^{\text{ème}}$ ddl (q_d peut être nul). Avant la prise en compte des C.L. le système s'écrit :

$$\boxed{[K]_t [Q] = [F]_t}$$

Nous allons introduire $q_i = q_d$ dans l'écriture matricielle :

$[K]_t = [k_{ij}]_t$ devient :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1(i-1)} & 0 & k_{1(i+1)} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{(i-1)1} & \dots & k_{(i-1)(i-1)} & 0 & k_{(i-1)(i+1)} & \dots & k_{(i-1)n} \\ 0 & \dots & 0 & k_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ k_{(i+1)1} & \dots & k_{(i+1)(i-1)} & 0 & k_{(i+1)(i+1)} & \dots & k_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{n(i-1)} & 0 & k_{n(i+1)} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$[F]_t = [f_i]_t$ devient :

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{(i-1)} \\ f_i = k_{ii} * q_d \\ f_{(i+1)} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Il faut donc, pour appliquer cette méthode, modifier la matrice de rigidité sur toute une colonne et toute une ligne, en les remplissant de zéro et la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du second membre. Cette méthode nécessite $(n-1)^2 + 1$ opérations et à pour conséquence d'augmenter considérablement la largeur de bande de la matrice. Cela réduit la performance des algorithmes de résolution des systèmes linéaires. Cette méthode n'est pas utilisée dans la pratique.

5.3.4.2. Méthode de pénalisation

Cette méthode est basée en gros sur le même principe mais, plutôt que de trouver un solution exacte on va prendre une solution approchée de très bonne précision. Il suffit de pénaliser le coefficient k_{ii} par un terme très grand devant ceux de la matrice de rigidité et d'ajouter à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du second membre un terme:

$[K]_t = [k_{ij}]_t$ devient : $[F]_t = [f_i]_t$ devient

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & k_{ii} + k & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad [F] = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{(i-1)} \\ f_i + k * q_d \\ f_{(i+1)} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

où $k = 10^{10} * \max(k_{ij})$:

Avec cette méthode on obtient :

$$q_i = q_d \left(\frac{k}{k + k_{ii}} - \sum_{l \text{ prive de } i} \frac{q_l}{q_d} \frac{k_{il}}{k_{ii} + k} + \frac{f_i}{(k + k_{ii})_q} \right) \cong q_d (1 + \varepsilon)$$

Cette méthode est plus efficace que la méthode brutale, car elle comporte uniquement deux changements dans les matrices et ne modifie pas la largeur de bande. Cette méthode est souvent utilisée dans les codes de calcul.

5.3.4.3. Méthode Lagrangienne

Cette méthode est la plus élégante car elle consiste à relaxer les conditions aux limites et à introduire de nouvelles variables. Supposons que nous avons r conditions aux limites et n d.d.l. Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$[R]_{r \times n} [Q] = [S]$$

Il faut donc introduire r multiplicateur de Lagrange, que l'on écrit sous forme vectoriel :

$${}^t[\lambda] = [\lambda_1 \dots \lambda_r]$$

Nous avons donc $n+r$ inconnues dans le nouveau problème qui s'écrit sous la forme :

$$F_v = \frac{1}{2} {}^t[Q] [K]_t [Q] - \langle F_t, Q \rangle + {}^t[\lambda] ([R]_{r \times n} [Q] - [S])$$

qui en calculant la variation de la fonctionnelle devient :

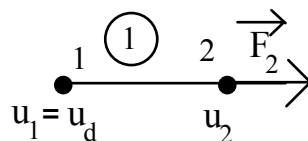
$$\begin{aligned} \delta(FV) &= \delta \left(\frac{1}{2} {}^t[Q][K]_t[Q] - \langle F_t, Q \rangle + {}^t[\lambda] \left([R]_{r \times n} [Q] - [S] \right) \right) \\ &= \delta \left({}^t[Q] \right) \left([K]_t [Q] - [F]_t \right) + \delta \left({}^t[\lambda] \right) \left([R]_{r \times n} [Q] \right) \\ &\quad + {}^t[\lambda] [R]_{r \times n} \delta([Q]) - \delta \left({}^t[\lambda] \right) [S] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta \left({}^t[Q] \right) \left([K]_t [Q] - [F]_t \right) + \delta \left({}^t[\lambda] \right) \left([R]_{r \times n} [Q] \right) \\ &\quad + {}^t \delta([Q]) [R]_{r \times n} [\lambda] - \delta \left({}^t[\lambda] \right) [S] \\ &= 0 \quad \forall \delta \left({}^t[Q] \right), \delta \left({}^t[\lambda] \right) \in C.A(0) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} [K] & {}^t[R] \\ [R] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Q] \\ [\lambda] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [F] \\ [S] \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \delta \left({}^t[Q] \right), \delta \left({}^t[\lambda] \right) \in C.A(0)$$

L'inconvénient principal est d'avoir introduit des inconnues supplémentaires. Montrons sur un exemple simple la mise en place de cette méthode.

Exemple :



Dans cet exemple simple cela donne:

$$[R] = [1 \ 0], [K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, [Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, [F] = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}, [S] = u_d$$

et donc le système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} k & -k & 1 \\ -k & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ u_d \end{bmatrix}$$

Dans ce cas le multiplicateur de Lagrange que nous avons introduit correspond à la force de réaction en 1.

5.4. Approximation conforme

Pb : A quelles conditions peut on affirmer que :

$$\Pi_{dt} = \sum_{elt} \Pi_e \quad \text{ou} \quad W_t = \sum_{elt} W_e$$

Considérons le cas 1-D pour y voir plus claire . L'énergie de déformation d'une poutre en flexion est :

$$\begin{aligned} W_{fl} &= \frac{EI}{2} \int_{x_1}^{x_2} (v''(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} M(x)v''(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[M(x)v'(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \left[M'(x)v(x) \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} M''(x)v(x)dx \right) \end{aligned}$$

Il faut donc que v(x) soit deux fois intégrables sur l'élément. M(x) et M'(x) sont continus s'il n'existe pas d'efforts ou de moments ponctuels aux extrémités. Maintenant assemblons deux éléments, et donc leurs énergies de déformation:

$$\begin{aligned} 2W^1_{fl} + 2W^2_{fl} &= \left[M^1(x)v'^1(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \left[M'^1(x)v^1(x) \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} M''^1(x)v^1(x)dx \\ &\quad + \left[M^2(x)v'^2(x) \right]_{x_2}^{x_3} - \left[M'^2(x)v^2(x) \right]_{x_2}^{x_3} + \int_{x_2}^{x_3} M''^2(x)v^2(x)dx \end{aligned}$$

en regroupant les termes de raccord, on observe que :

$$M^1(x_2) \left(v'^1(x_2) - v'^2(x_2) \right) \quad \text{et} \quad M'^1(x_2) \left(v^1(x_2) - v^2(x_2) \right)$$

Il est claire que si v(x) et v'(x) ne sont pas continue il y a stockage d'une énergie finie à chaque raccord qui peut être assimilée à une rotule.

On demande donc que v(x) soit deux fois intégrables sur l'élément et seulement qu'elle soit à dérivée continue aux extrémités

Def : Un élément vérifiant ces propriétés de continuité est dit conforme.

Rq : Dans le cas d'énergie dépendant d'un gradient, élasticité, il suffit que $u(x)$ soit continue.

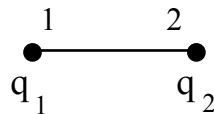
6. Quelques éléments

Nous allons ici présenter complètement un certain nombre d'éléments, pour permettre une meilleure compréhension de la méthode par éléments finis et de ces résultats. Pour pouvoir assembler des matrices de rigidité élémentaire il faut pouvoir les expliciter, c'est ce que nous allons faire maintenant. Nous rappelons que dans un maillage il est possible d'utiliser uniquement des éléments ayant les mêmes degrés d'interpolation pour la géométrie et pour les déplacements.

6.1. Élément 1-D

6.1.1. Barre à champ linéaire (2 noeuds)

C'est l'élément le plus simple : il est composé de deux noeuds ayant chacun 1 ddl. L'interpolation des déplacements sur l'élément est linéaire. Cet élément est utilisé pour traiter les problèmes de traction-compression dans une barre.



En utilisant les notations classiques

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} ES(u'(x))^2 dx$$

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

$$u(x) = N_1(x)q_1 + N_2(x)q_2 = N_i(x)q_i$$

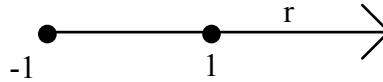
q_i est le déplacement du noeud i dans le repère lié à la barre.

Il est facile de déterminer les fonctions $N_i(x)$ à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} u(x_1) = q_1 \\ u(x_2) = q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1(x_1) = 1 \\ N_2(x_1) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} N_1(x_2) = 0 \\ N_2(x_2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{x - x_1}{L} \\ N_2(x) = \frac{x - x_1}{L} \end{cases}$$

L est la longueur de l'élément considéré. Il apparaît donc que les fonctions de base ainsi définies dépendent de l'élément. Cette dépendance rend difficilement programmable de tel fonctions, à chaque longueur d'élément correspond deux fonctions de base. Ce problème est résolu en utilisant un élément de référence :



r est la coordonnée intrinsèque de l'élément de référence. Il est simple de passer de l'élément de référence à l'élément réel à l'aide du changement de variable suivant :

$$x = x_1 \frac{1-r}{2} + x_2 \frac{1+r}{2}$$

$$= x_1 G_1(r) + x_2 G_2(r)$$

où les G_i sont appelées les fonctions d'interpolation géométrique. Il suffit alors de faire ce changement de variable dans les fonctions d'interpolation des déplacements, $N_i(x)$ pour obtenir :

$$\begin{cases} G_1(r) = N_1(r) \\ G_2(r) = N_2(r) \end{cases}$$

Dans ce cas particulier les deux couples de fonctions sont identiques, c'est pourquoi on parle d'élément **Isoparamétrique**. L'interpolation en déplacement est la même que l'interpolation géométrique.

Calculons l'énergie de déformation sur l'élément de référence :

$$W_{ref} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ES \left(\frac{du(r)}{dr} \right)^2 dr$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dx}$$

$$dx = \frac{dx}{dr} dr = \frac{L}{2} dr$$

On peut maintenant calculer la matrice de rigidité élémentaire de l'élément de référence, en reprenant les notations classiques :

$$[K]_{ref} = \int_{-1}^1 {}^t[B][D][B]dr$$

$$; [K]_{ref} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} [ES] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} dr = ES \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$${}^t[B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} \\ N_{2,r} \end{bmatrix}; [D] = [ES]$$

et donc la matrice de rigidité élémentaire

$$[K]_e = \int_{x_1}^{x_2} {}^t[B]_e [D] [B]_e dx$$

$${}^t[B]_e = \begin{bmatrix} N_{1,x} \\ N_{2,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,r} \frac{dr}{dx} \\ N_{2,r} \frac{dr}{dx} \end{bmatrix} = \frac{2}{L} [B]$$

$$[K]_e = \int_{x_1}^{x_2} {}^t[B]_e [D] [B]_e dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{L} {}^t[B] [D] \frac{2}{L} [B] \frac{L}{2} dr = \frac{2}{L} [K]_{ref}$$

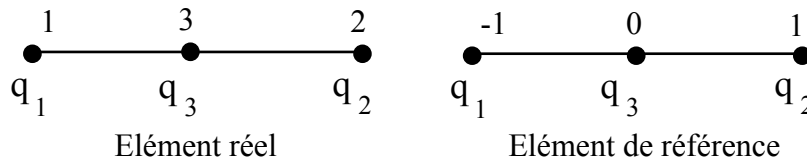
A ce stade nous pouvons faire deux remarques :

Les matrices de rigidités élémentaires se déduisent de la matrice de rigidité élémentaire de référence. Il suffit de calculer une fois cette matrice pour tous les éléments

Comme l'interpolation des déplacements est linéaire, les contraintes et les déformations sont constantes sur l'élément. Cet élément ne sera donc vraiment efficace que si le gradient de déformation est faible. Il donne une solution exacte dans le cas d'une force appliquée à l'extrémité de l'élément.

6.1.2. Barre à champ quadratique (3noeuds)

Cet élément est composé de trois noeuds ayant chacun 1 ddl et l'interpolation des déplacements sur l'élément est quadratique. Cet élément est utilisé pour traiter les problèmes de traction-compression dans une barre.



En utilisant les notations classiques

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} ES(u'(x))^2 dx$$

$$u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$u(x) = N_1(x)q_1 + N_2(x)q_2 + N_3(x)q_3 = N_i(x)q_i$$

q_i est le déplacement du noeud i dans le repère lié à la barre.

Il est facile de déterminer les fonctions $N_i(r)$ à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} u(-1) = q_1 \\ u(0) = q_3 \\ u(1) = q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1(-1) = 1 \\ N_2(-1) = 0 \\ N_3(-1) = 0 \end{cases}; \begin{cases} N_1(0) = 0 \\ N_2(0) = 0 \\ N_3(0) = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} N_1(1) = 0 \\ N_2(1) = 1 \\ N_3(1) = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} N_1(r) = \frac{r(r-1)}{2} \\ N_2(r) = \frac{r(r+1)}{2} \\ N_3(r) = (1-r^2) \end{cases}$$

Les fonctions d'interpolation géométrique G_i sont inchangées :

$$\begin{aligned} x &= x_1 \frac{1-r}{2} + x_2 \frac{1+r}{2} \\ &= x_1 G_1(r) + x_2 G_2(r) \end{aligned}$$

Dans ce cas les deux couples de fonctions sont différentes. Calculons l'énergie de déformation sur l'élément de référence :

$$W_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ES \left(\frac{du(r)}{dr} \right)^2 dr ; \frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dx} ; dx = \frac{dx}{dr} dr = \frac{L}{2} dr$$

On peut maintenant calculer la matrice de rigidité élémentaire de l'élément de référence, en reprenant les notations classique :

$$[K]_{\text{ref}} = \int_{-1}^1 {}^t[B][D][B]dr ; {}^t[B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} \\ N_{2,r} \\ N_{3,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2r-1}{2} \\ \frac{2r+1}{2} \\ 2r \end{bmatrix}$$

et donc la matrice de rigidité élémentaire

$$[K]_e = \int_{x_1}^{x_2} {}^t[B]_e [D][B]_e dx$$

$${}^t[B]_e = \begin{bmatrix} N_{1,x} \\ N_{2,x} \\ N_{3,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,r} \frac{dr}{dx} \\ N_{2,r} \frac{dr}{dx} \\ N_{3,r} \frac{dr}{dx} \end{bmatrix} = \frac{2}{L} {}^t[B]$$

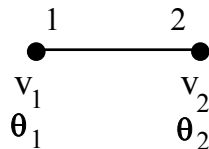
$$[K]_e = \int_{x_1}^{x_2} {}^t[B]_e [D][B]_e dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{L} {}^t[B][D]\frac{2}{L}[B]\frac{L}{2} dr = \frac{2}{L} [K]_{ref}$$

$$[K]_{ref} = \int_{-1}^1 ES \begin{bmatrix} (N_{1,r})^2 & N_{1,r}N_{2,r} & N_{1,r}N_{3,r} \\ & (N_{2,r})^2 & N_{2,r}N_{3,r} \\ \text{Symm} & & (N_{3,r})^2 \end{bmatrix} dr$$

RQ : Les intégrations se font entre 1 et -1, on peut donc calculer ces intégrales à l'aide des méthodes classique d'intégration numérique (Gauss ou Newton-Cotes). Il faut utiliser deux points de gauss pour obtenir une intégration exacte. On peut également faire une intégration réduite, en utilisant un seul point. La méthode des éléments finis ayant une tendance à surestimer la raideur d'une structure, l'utilisation d'éléments à intégration réduite permet de compenser ce travers. Aussi pour faire un premier calcul sur une structure il est conseillé d'utiliser peut d'éléments mais à intégration réduite.

6.1.3. Barre à 2 noeuds et 4 ddl

Dans les problèmes de flexion, il est nécessaire de satisfaire les conditions de continuité C^1 , et donc il faut introduire les dérivées des déplacements comme ddl.



En utilisant les notations classiques, l'énergie de flexion d'une poutre est :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI(v''(x))^2 dx$$

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

$$v(x) = N_1(x)q_1 + N_2(x)q_2 + N_3(x)q_3 + N_4(x)q_4 = N_i(x)q_i$$

$$[Q] = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2] \quad \text{où } \theta_i = \frac{\partial v}{\partial x}(x_i)$$

Les $N_i(x)$ sont les fonctions d'interpolations des déplacements sur l'élément réel. $[Q]$ est le vecteur des inconnues nodales, ou ddl, sur l'élément de réel.

Les fonctions $N_i(r)$ sont celles sur l'élément de référence et $[Q_r]$ le vecteur des inconnues nodales, ou ddl, sur l'élément de référence.

$$v(r) = N_1(r)q_{1r} + N_2(r)q_{2r} + N_3(r)q_{3r} + N_4(r)q_{4r}$$

$$[Q_r] = [v_{1r}, \theta_{1r}, v_{2r}, \theta_{2r}] \quad \text{où } \theta_{ir} = \frac{\partial v}{\partial r}((-1)^i) \quad \text{et } v_{1r} = v_1$$

$$\theta_{ir} = \frac{\partial v}{\partial r}((-1)^i) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_i) \frac{dx}{dr} = \frac{dx}{dr} \theta_i$$

$$[Q_r] = \left[v_1, \frac{dx}{dr} \theta_1, v_2, \frac{dx}{dr} \theta_2 \right]$$

Les fonctions d'interpolation géométrique G_i sont inchangées :

$$\begin{aligned} x &= x_1 \frac{1-r}{2} + x_2 \frac{1+r}{2} \\ &= x_1 G_1(r) + x_2 G_2(r) \end{aligned}$$

Nous allons comme dans les deux éléments précédents étudier l'énergie de déformation sur l'élément de référence .

Nous allons écrire un exemples des relation permettant de calculer les fonction $N_i(r)$

$$N_1(-1) = 1, N_1'(-1) = 0, N_2(-1) = 0, N_2'(-1) = 0$$

En résolvant ce système pour les quatre fonctions, on obtient :

$$\begin{cases} N_1(r) = \frac{1}{4}(2+r)(r-1)^2 & , \quad N_2(r) = (1-r^2)(1-r) \\ N_3(r) = \frac{1}{4}(2-r)(r+1)^2 & , \quad N_4(r) = (r^2-1)(1+r) \end{cases}$$

$$W_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 EI \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)^2 dr ; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dx} ; \quad dx = \frac{dx}{dr} dr = \frac{L}{2} dr$$

On peut maintenant calculer la matrice de rigidité élémentaire de l'élément de réel à partir de l'élément de référence. Il faut dans ce cas faire attention au faite que les inconnues nodales de l'élément de référence, $[Q_r]$ ne sont pas les même que celles de l'élément de réel $[Q]$:

$$W_{ref} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 {}^t[Q_r] {}^t[B][D][B][Q_r] dr$$

$$[Q_r] = [v_{1r}, \theta_{1r}, v_{2r}, \theta_{2r}] = \left[v_1, \frac{dx}{dr} \theta_1, v_2, \frac{dx}{dr} \theta_2 \right]$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} {}^t[Q] {}^t[B]_e [D][B]_e [Q] dx \text{ où } [Q] = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} v(r) &= N_{1,rr} v_1 + N_{2,rr} \theta_{1r} + N_{3,rr} v_{2r} + N_{4,rr} \theta_{2r} \\ &= N_{1,rr} v_1 + N_{2,rr} \theta_1 \frac{dx}{dr} + N_{3,rr} v_{2r} + N_{4,rr} \theta_{2r} \frac{dx}{dr} \\ &= [Q] \left[N_{1,rr} \left(N_{2,rr} \frac{dx}{dr} \right) N_{3,rr} \left(N_{4,rr} \frac{dx}{dr} \right) \right] \\ &= [Q] {}^t[B] \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = [Q] {}^t[B]_e$$

$$[B]_e = [N_{1,xx} \ N_{2,xx} \ N_{3,xx} \ N_{4,xx}]$$

$$[B]_e = \frac{d^2 r}{dx^2} [B] = \frac{4}{L^2} [B] = \frac{4}{L^2} \left[N_{1,rr} \left(\frac{dx}{dr} N_{2,rr} \right) N_{3,rr} \left(\frac{dx}{dr} N_{4,rr} \right) \right]$$

$$[K]_e = \int_{x_1}^{x_2} {}^t[B]_e [D][B]_e dx = \int_{-1}^1 \frac{4}{L^2} {}^t[B][D] \frac{4}{L^2} [B] \frac{L}{2} dr$$

$$[K]_e = \frac{16}{L^4} \int_{-1}^1 EI \begin{bmatrix} (N_{1,rr})^2 & \frac{L}{2} N_{1,rr} N_{2,rr} & N_{1,rr} N_{3,rr} & \frac{L}{2} N_{1,rr} N_{4,rr} \\ & \frac{L^2}{4} (N_{2,rr})^2 & \frac{L}{2} N_{2,rr} N_{3,rr} & \frac{L^2}{4} N_{2,rr} N_{4,rr} \\ & & (N_{3,rr})^2 & \frac{L}{2} N_{3,rr} N_{4,rr} \\ \text{sym} & & & \frac{L^2}{4} (N_{4,rr})^2 \end{bmatrix} dr$$

RQ : Ces éléments sont dit de type Hermitte n Noeuds, 2n ddl, continuité C^1 . Les deux présentés précédemment sont de type Lagrange (n+1) Noeuds, n+1 ddl, continuité C^0 Toutes les remarques faites dans le cas 1-D sont valables dans les autres cas.

6.1.4. Etude des valeurs propres.

Cette étude doit nous permettre de mettre le doigt sur la relation entre les mouvements de corps rigide et le mode de déformation à énergie nulle. Pour simplifier l'écriture du problème nous allons considérer la barre à deux noeuds.

$$[K]_e = ES \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient :

$$[K]_e - \lambda Id = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{2ES}{L} \end{cases} \text{ avec comme vecteur propre } \begin{cases} v_1 = (1 \ 1) \\ v_2 = (-1 \ 1) \end{cases}$$

La première valeur propre correspond au mode de déformation à énergie nulle qui correspond pour cet élément à une translation d'ensemble $q_1=q_2$.

La deuxième valeur propre correspond au mode de déformation à énergie non nulle qui correspond pour cet élément à une contraction de l'élément $q_1=-q_2$.

Comme ce sont les seuls modes propres de déformation de cet élément, toute déformation en sera une combinaison linéaire. Cet élément ne peut donc prendre en compte les rotations. Il est donc utilisable uniquement en traction compression. Ces observations rejoignent ce que nous avons dit sur cet élément. Une étude pour les autres éléments 1-D permettra de définir les modes propres de déformation pour chacun d'entre eux.

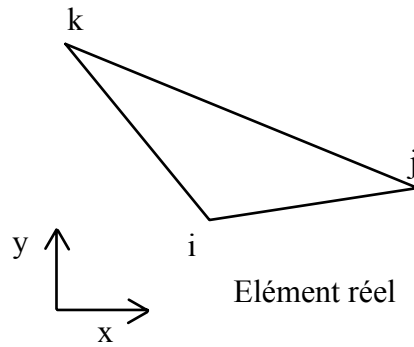
6.2. Élément 2-D

Nous présentons succinctement ici seulement quelques éléments 2-D. Les remarques que nous avons faites dans le cas 1-D reste valable. Il existe les mêmes familles d'éléments : isoparamétrique linéaire ou non et les non isoparamétrique. Dans les bibliothèques il existe de très bons livres (Modélisation des structures par éléments finis . J.L. Batoz et G. Dhatt - Analyse des structures par éléments finis J.F. Imbert.- ...) énumérant tous les éléments ainsi que leurs matrices de rigidités.

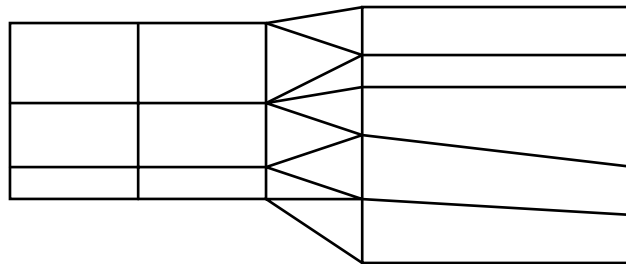
6.2.1. Isoparamétrique linéaire.

6.2.1.1. Le triangle.

Le triangle à trois noeuds est aux éléments 2-D ce que la barre à deux noeuds aux éléments 1-D. Il est inutile d'introduire un élément de référence dans ce cas, mais il est plus avantageux d'utiliser le système de coordonnées intrinsèques d'un triangle : le système des coordonnées barycentriques. La numérotation d'un élément se fait toujours dans le sens trigonométrique positif.



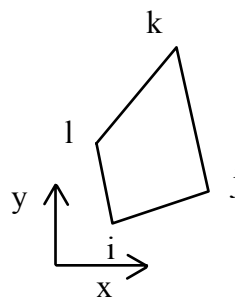
Cet élément a 6 ddl qui sont les déplacements $u(x,y)$ et $v(x,y)$ à chacun des noeuds. Le champ de contrainte sur cet élément est constant. Le champ de contrainte est donc discontinu sur la structure discrétisée. Cette caractéristique fait que cet élément est très rigide. On utilise cet élément soit dans les régions à faible gradient de contraintes ou pour raccorder des maillages de taille différente.



Raccordement de maillage.

6.2.1.2. Le quadrangle

Le quadrangle à 4 noeuds et 8ddl est un élément très souvent utilisé. Son champ de contrainte n'est plus constant. On peut également choisir entre une intégration complète ou une intégration réduite de la matrice de rigidité. On trouve cet élément dans toutes les bibliothèques d'élément des softs utilisés.



Le quadrangle

6.2.2. Isoparamétrique non linéaire

Il existe là aussi soit le triangle à 6 ou 9 noeuds ou le quadrangle à 8 ou 12 noeuds. Ces éléments sont de bonnes qualités pour qui sait les utiliser convenablement. Il est souvent recommandé de les utiliser avec une intégration réduite. Dans un cas on a une

interpolation quadratique (6-8) et dans l'autre cas une interpolation cubique. Le nombre de points de gauss ainsi que leurs positions sur l'élément sont donnés dans les documentations des logiciels.

6.2.3. Non isoparamétrique

Il y a deux familles d'éléments soit les Serendip ou les Lagrange.

Les premiers ont une interpolation géométrique linéaire et quadratique ou cubique pour les déplacements avec des noeuds uniquement sur la frontière.

Les seconds ont également une interpolation géométrique linéaire et quadratique ou cubique pour les déplacements mais ils possèdent des noeuds internes.